Sonderdruck

aus

PHYSIKALISCHE BLÄTTER

Jahrgang 46, Heft 11, 1990

© Physik-Verlag GmbH, D-6940 Weinheim 1990

Der fraktionierte Quanten-Hall-Effekt

Von T. Chakraborty, Stuttgart*)

Ein zweidimensionales Elektronengas in einem hohen Magnetfeld senkrecht zur Ebene kondensiert bei sehr tiefen Temperaturen in eine neuartige Quantenflüssigkeit, in einen inkompressiblen flüssigen Zustand, bei dem die Elementaranregungen eine nicht-ganzzahlige Ladung haben. Dieser Artikel beschreibt, wie sich das Verständnis dieses Phänomens und einiger damit zusammenhängenden ungewöhnlichen Eigenschaften entwickelt hat.

1. Einleitung

Der Grundzustand eines korrelierten Elektronensystems hat die Festkörperphysiker seit den frühen Arbeiten von Wigner [1] immer wieder herausgefordert. In seiner Berechnung der *Korrelationsenergie* des Elektronengases zeigte Wigner, daß bei geringer Dichte die potentielle Energie über die kinetische Energie dominiert. Das Elektronensystem bildet dann einen sogenannten Wigner-Kristall. Dieser Effekt wurde bei Elektronen auf einer Oberfläche von flüssigem Helium beobachtet. Auf einer Halbleiter-Grenzfläche beträgt die Elektronendichte jedoch mehr als $10^{11}/cm^2$, d. h. sie ist viel zu hoch, als daß man die Kristallisation bei erreichbaren Temperaturen beobachten könnte. In Gegenwart eines sehr hohen Magnetfeldes senkrecht zur Ebene ist dies jedoch anders: In Feldrichtung ist die kinetische Energie durch die Lokalisierung in der dünnen Schicht stark eingeschränkt, während sie in der zweidimensionalen Ebene durch die Landau-Quantisierung [2] beschränkt wird. Damit sind die Elektronen bei sehr tiefen Temperaturen stark korreliert und befinden sich im extremen Quantenlimes, in dem ihre Wechselwirkung dominiert. Auf der Suche nach der Wigner-Kristallisation entdeckten Tsui, Störmer und Gossard [3] 1982 den fraktionierten[1)] Quanten-Hall-Effekt (FQHE), zwei Jahre nach Erscheinen der bahnbrechenden Arbeit von v. Klitzing, Dorda und Pepper [4], die die Entdeckung der ganzzahligen Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit mitteilte.

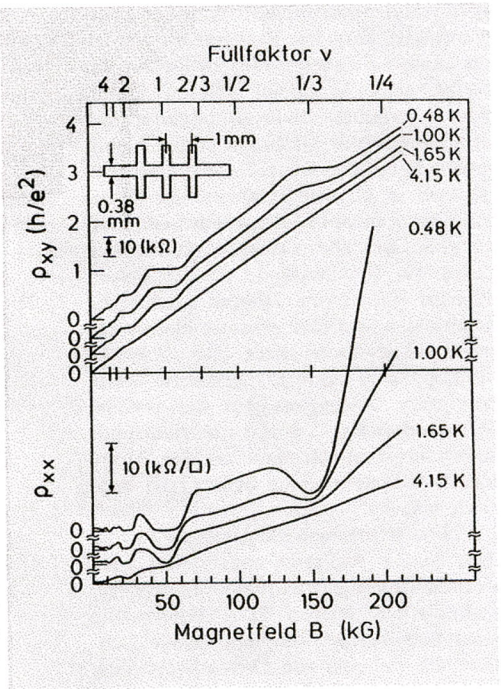

Abb. 1: Der Hall-Widerstand ϱ_{xy} und der Widerstand in Richtung des Stroms ϱ_{xx} als Funktion des Magnetfeldes in der $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$-Heterostruktur, in der der FQHE entdeckt wurde. Die Elektronendichte beträgt $n = 1{,}23 \cdot 10^{11}/cm^2$. Die Skala auf der oberen Abszisse bezeichnet den Füllfaktor, der im Text definiert ist [3].

Der FQHE wurde in $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$-Heterostrukturen gemessen, in denen es zweidimensionale Elektronensysteme mit hoher Beweglichkeit gibt. Für bestimmte gebrochenzahlige Füllfaktoren ν zeigt hier die Hall-Leitfähigkeit Plateaus, außerdem wird der longitudinale Widerstand sehr klein. Hierbei ist ν ein rationaler Bruch mit ungeradem Nenner (für einen geraden Nenner wurde der fraktionierte Quanten-Hall-Effekt erst 1987 nachgewiesen [5]).

Abb. 1 zeigt den Hall-Widerstand ϱ_{xy} und den Widerstand in Richtung des Stromes ϱ_{xx} als Funktion des magnetischen Feldes für einige Füllfaktoren $\nu = nh/eB$, wobei n die Ladungsdichte und B das Magnetfeld sind. Für Werte von $\nu > 1$ lassen sich die typischen Züge des ganzzahligen QHE deutlich erkennen. Im extremen Quantenlimes, d. h. bei $\nu < 1$ und bei Temperaturen kleiner als 0,48 K, gibt es ein Minimum in ϱ_{xx} und ein Hall-Plateau bei $\nu = 1/3$. Bei späteren Experimenten mit Proben höherer Mobilität konnte dieser Wert auf $3 \cdot 10^{-5}$ genau nachgemessen werden; ϱ_{xx} war dort kleiner als 0,1 $\Omega/\square$ (ϱ_{xx} wird ausgedrückt in Widerstand pro Quadrat, unabhängig von der Quadratgröße). Bei der niedrigsten Temperatur sieht man bei $\nu = 2/3$ eine schwache Struktur. Weitere Experimente mit Proben höherer Beweglichkeit ergaben Anomalien bei folgenden anderen Füllfaktoren (siehe auch Abb. 2):

* *Dr. Tapash Chakraborty, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, Heisenbergstraße 1, D-7000 Stuttgart 80. – Gegenwärtige Anschrift: Division of Physics, National Research Council of Canada, Montreal Road, Ottawa, ON K1A 0R6, Canada.*

[1] *In diesem Beitrag wird durchgehend das Wort „fraktioniert" verwendet. Dies ist ebenso wie die Eindeutschungen „fraktional" bzw. „fraktionell" vom englischen „fractional" abgeleitet. Die korrekte deutsche Übersetzung „gebrochenzahlig" setzt sich nicht durch; sie kollidiert zudem mit der international verbreiteten Abkürzung „FQHE". (Anmerkung der Red.)*

0031–9279/90/1111–0432 $ 03.50+.25/0 – © Physik-Verlag GmbH, D-6940 Weinheim, 1990

$$\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1^*}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2^*}{9}, \frac{2^*}{11}, \frac{3}{7}, \frac{3^*}{11}, \frac{3^*}{13}, \frac{3^*}{17}, \frac{4}{9}, \frac{4^*}{11}, \frac{4^*}{13}, \frac{5}{11}, \frac{6^*}{13}, \frac{7^*}{15}$$

$$= \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5^*}{9}, \frac{6^*}{11}, \frac{7^*}{13}$$

$$= \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{10}{7}, \frac{13^*}{9}, \frac{11}{7}, \frac{7^*}{3}, \frac{8^*}{3}, \frac{5}{2}$$

Füllfaktoren, bei denen Anomalien beobachtet wurden.

Ein Stern an den Zahlen weist auf Füllfaktoren hin, für die bis jetzt nur Strukturen in ϱ_{xx} gesehen wurden. Die erste Zeile entspricht den Verhältnissen $\nu = p/q$, $(2p < q)$, die zweite bezeichnet $\nu = 1 - p/q$, während die letzte Zeile die Füllfaktoren $\nu = 1 + p/q$, $1 + (1 - p/q)$, $2 + p/q$, etc. beschreibt. Diese Anordnung wird im weiteren bei der Beschreibung der Elektron-Loch-Symmetrie von Bedeutung sein und weiter unten erläutert.

2. Das Verständnis des Effekts

Die typischen Merkmale des FQHE, die Plateaus in ϱ_{xy} und die Minima in ϱ_{xx}, sind im Erscheinungsbild denen des ganzzahligen QHE sehr ähnlich. Trotz dieser auffälligen Ähnlichkeit ist der physikalische Ursprung ein anderer. Hinweise für ein Verständnis des FQHE geben folgende Tatsachen:

– Plateaus und Minima treten bei gebrochenzahligen Besetzungszahlen auf, bei denen keine Struktur in der Einteilchen-Zustandsdichte der Elektronen erwartet wird.

– Man beobachtet den Effekt nur in Proben sehr hoher Beweglichkeit.

Daraus schließt man, daß es sich beim FQHE um eine intrinsische Eigenschaft handelt und daß die Elektron-Elektron-Wechselwirkung eine entscheidende Rolle spielt. Der wichtigste Schritt in der Erklärung des FQHE ist daher, die Eigenschaften eines zweidimensionalen Elektronengases vor einem neutralisierenden Hintergrund und in einem Magnetfeld zu bestimmen, das hoch genug ist, damit das unterste Landau-Niveau nur teilweise gefüllt ist. Eine sehr interessante Arbeit über dieses Problem stammt von Yoshioka, Halperin und Lee [6]. Die Autoren berichten über numerische Rechnungen, bei denen einige wenige Elektronen in einer rechteckigen Zelle eingeschlossen sind. Sie verwendeten periodische Randbedingungen, und mit einem gleichmäßig positiv geladenen Hintergrund wurde das System ladungsneutralisiert. Der Hamilton-Operator für die wechselwirkenden Elektronen wurde dann numerisch diagonalisiert.

2.1 Grundzustand

Abb. 3 zeigt die Grundzustandsenergie pro Teilchen als Funktion der Besetzungszahlen. Die Energie ist in Einheiten der Coulomb-Energie $e^2/\varepsilon l_0$ aufgetragen, wobei ε die Dielektrizitätskonstante von GaAs und $l_0 = (\hbar c/eB)^{1/2}$ die sogenannte magnetische Länge sind. Es ist bekannt, daß bei niedrigen Temperaturen und starken magnetischen Feldern der Hartree-Fock-Grundzustand ein Wigner-Kristall ist [7]. Die Ergebnisse in Abb. 3 zeigen einige interessante Züge: Erstens hat der Grundzustand des Systems deutlich niedrigere Energie als der Wigner-Kristall. Es ist bemerkenswert, daß für die Hartree-Fock-Ergebnisse in dieser Abbildung keine Strukturen bei $\nu = 1/3$ oder bei anderen rationalen Besetzungszahlen auftreten. Ohnehin ist es zweifelhaft, ob der FQHE über eine kristalline Ordnung erklärt werden kann, da solch ein Zustand durch Störstellen in einem realen System fixiert („gepinnt") werden sollte. Damit sollte eine nichtlineare Strom/Spannungs-Charakteristik auftreten, weil dieses Pinning bei kleinen elektrischen Feldern aufgehoben wird. Bei $\nu = 1/3$ wurden selbst bei so kleinen elektrischen Feldern wie 10 μV/cm keine solchen Nichtlinearitäten beobachtet [3]. Die numerische Arbeit von [6] deutet deshalb ganz klar darauf hin, daß der wahre Grundzustand nicht ein Wigner-Kristall ist, sondern eine Art *Flüssigkeit*. Zweitens deuten sich Spitzen bei $\nu = 1/3$ und $\nu = 2/5$ in der Energie pro Teilchen als Funktion des Füllfaktors an (weiterhin eine Struktur bei $\nu = 1/2$, die jedoch sehr von der Systemgröße abhängt). Die Kompressibilität ist proportional zur inversen Ableitung der Energie nach der Dichte. Da diese Ableitung in einer Spitze divergiert, bedeutet eine nach unten zeigende Spitze in Abb. 3, daß die Kompressibilität an der Spitze selbst Null ist. Damit ist die Dichte an diesem Punkt eingefroren, und es gibt keine langwelligen phononenartigen Anregungen im System.

Bis jetzt wissen wir aus numerischen Rechnungen von [6] nur, daß der Grundzustand dem einer translationsinvarianten, wahrscheinlich inkompressiblen Flüssigkeit entspricht. Wir haben weder ein

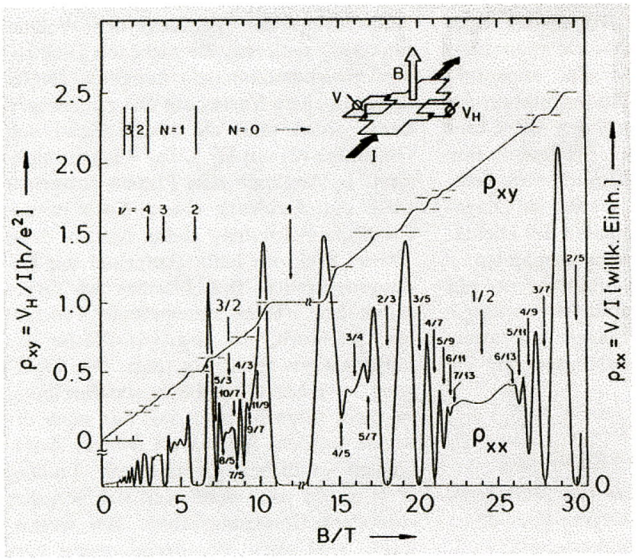

Abb. 2: Der longitudinale Widerstand ϱ_{xx} und der Hall-Widerstand ϱ_{xy} einer Probe mit einer Beweglichkeit von $1{,}3 \cdot 10^6$ cm²/Vs bei $T < 150$ mK [5].

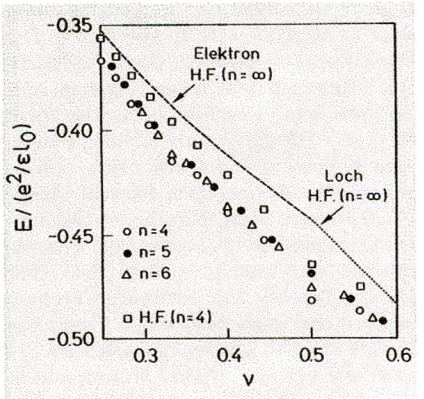

Abb. 3: Energie pro Teilchen eines zweidimensionalen Elektronengases als Funktion der teilweisen Füllung des untersten Landau-Niveaus. Die gestrichelte bzw. gepunktete Linie ist die Energiekurve für den Elektron- bzw. den Lochkristall (unbesetzte Elektronenzustände) in Hartree-Fock-Näherung für ein unendlich ausgedehntes System [6].

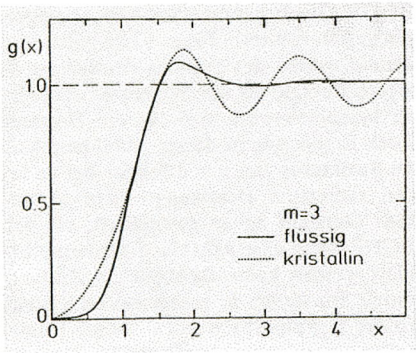

Abb. 4: Paarkorrelationsfunktion g(x) als Funktion des dimensionslosen Teilchenabstands für den Laughlin-Zustand (durchgezogene Linie) und den Wigner-Kristall in Hartree-Fock-Näherung (gepunktete Linie) für ν = 1/3.

klares Bild von diesem Zustand an sich, noch von den Ursachen der Besonderheiten bei gewissen rationalen Werten des Füllfaktors. Die Antwort auf diese fundamentalen Fragen gibt Laughlin [8] in einer eleganten Theorie. Er schlägt eine genäherte Elektronenwellenfunktion für $\nu = 1/m$ vor und erklärt, warum es zu der erwähnten Diskontinuität in der Steigung der Energiekurve als Funktion der Teilchenzahl kommt. Laughlins Theorie hat viele wertvolle Einsichten geliefert und war die Basis für die meisten späteren Arbeiten auf diesem Gebiet. Laughlin führte folgende explizite Vielteilchen-Wellenfunktion ein:

$$\psi_m(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{N} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} |z_j|^2/4l_0^2\right) \quad (1)$$

wobei $z_j = x_j - iy_j$ die Position des j-ten Elektrons in komplexer Schreibweise und N die Zahl der Elektronen sind. Es wird angenommen, daß alle Elektronen ihren Spin parallel zum Feld ausrichten. Die Wellenfunktion gehorcht der Fermi-Statistik. Deswegen muß m eine *ungerade ganze Zahl* sein. Laughlin bemerkte auch, daß $|\psi|^2$ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zweidimensionalen, *klassischen*, einkomponentigen Plasmas identifiziert werden kann. Um die Wechselwirkung zu minimieren, werden die Plasmateilchen *gleichmäßig* verteilt mit einer Dichte, die $\nu = 1/m$ entspricht. Frühere theoretische Arbeiten über klassisches Plasma ergaben bereits, daß solch ein System erst bei sehr großen Werten von m kristallisiert und für $m \leq 70$ flüssig bleibt [8].

Kurz nachdem Laughlin seine Grundzustands-Wellenfunktion (2) einführte, interpretierte sie Halperin [9] in einer interessanten Darstellung. Man stelle sich vor, die Positionen aller Elektronen $n = 2, \ldots, N$ seien festgehalten. Dann ist χ die Wellenfunktion des ersten Elektrons am Ort z_1, parametrisiert durch die Positionen der anderen Teilchen z_j:

$$\chi(z_1) = \prod_{j=1}^{M} (z_1 - Z_j) \exp\left(-\frac{1}{4}|z_1|^2\right). \quad (2)$$

Mit dem *Fundamentalsatz der Algebra* aus der Funktionentheorie ist ein Polynom durch die Menge seiner Nullstellen $\{Z_j;\ j = 1, \ldots, M\}$ eindeutig bestimmt. Die Nullstellen von (2) erscheinen nun wie zweidimensionale Coulomb-Ladungen, die das Teilchen am Ort z_1 abstoßen. Um dem exponentiellen Gauß-Term entgegenzuwirken, verteilen sich die Nullstellen gleichmäßig mit einer Dichte von $1/(2\pi)$, da die Teilchen andernfalls in den Ursprung gezogen würden. Halperin beobachtete, daß sich bei Laughlins Wellenfunktion (2) die Nullstellen direkt an den Orten der anderen Teilchen befinden. Jedes Teilchen sieht also m Nullstellen. Man definiere nun einen *Vertex* als einen Punkt, an dem sowohl die Wellenfunktion Null ist, als auch eine Phasenverschiebung um 2π beim Umlauf in negativer Richtung auftritt. Das Besondere an Laughlins Wellenfunktion besteht darin, daß es genau m Vertices an jedem Ort eines Elektrons gibt und keine weiteren in der Ebene „vergeudet" sind [9].

Aufgrund der Analogie zum klassischen Plasma konnte Laughlin die Paarkorrelationsfunktion $g(x)$ direkt von Plasmatheoretikern übernehmen und jeglichen numerischen Aufwand vermeiden. Diese Funktion wird in Abb. 4 für $m = 3$, d. h. für $\nu = 1/3$, mit dem Grundzustand des Wigner-Kristalls verglichen. Für sehr kleine Abstände x geht in der Flüssigkeit $g(x)$ wie x^{2m} gegen Null, für den Kristall nur wie x^2. Die Funktion $g(x)$ ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort x zu finden, wenn eines bereits im Ursprung sitzt. In der Flüssigkeit sind also die Elektronen klarer voneinander getrennt, und dadurch kann die potentielle Energie des Systems weiter abgesenkt werden. Da die Korrelationsfunktion für große Abstände x schnell den Wert Eins erreicht, enthält die Wellenfunktion Laughlins daher hauptsächlich eine Nahordnung der Teilchen. Weder im Diagonal- noch im Nichtdiagonalteil der Dichtematrix ist eine Fernordnung vorhanden.

Die Paarkorrelationsfunktion ist ein wichtiges Hilfsmittel, um den Erwartungswert der potentiellen Energie auszuwerten. Abb. 5 zeigt die Bindungsenergie

$$E_{coh}(\nu) = E_{pot}(\nu) + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\nu,$$

aufgetragen als Funktion des Füllfaktors ν. Im Vergleich zum Wigner-Kristall ist der flüssige Zustand für bestimmte Füllfaktoren deutlich favorisiert. Die Grundzustandsenergie bei $\nu = 1/3$ stimmt sehr gut mit den erwähnten Cluster-Rechnungen [6] überein. Aus Abb. 5 würde man einen Flüssig-Fest-Phasenübergang bei $\nu \approx 1/10$ erwarten. Es gibt einige neuere experimentelle Versuche, diesen Übergang zu beobachten [10].

Das Magnetfeld in Laughlins Theorie ist so hoch, daß sich die Elektronen nur im untersten Landau-Niveau aufhalten können. In diesem Fall hat das Problem Elektron-Loch-Symmetrie. Daher beschreibt die Theorie auch stabile Zustände mit Besetzungszahlen $\nu = 1 - 1/m$, falls alle Elektronen ihren Spin parallel zum Magnetfeld ausgerichtet haben. Ähnlich kann man den Effekt für Füllfaktoren $\nu = 1 + 1/m$ und $\nu = 1 + (1 - 1/m)$ erklären, wenn man das obere spin-aufgespaltene Band ($1 < \nu < 2$) berücksichtigt. Diese Interpretation darf jedoch nicht auf die Fälle $\nu = 2 + 1/m$ oder $\nu = 2 + (1 - 1/m)$ ausgedehnt werden, da es hier nicht mehr nur eine Art von Einteilchen-Wellenfunktionen gibt, aus denen die Laughlin-Vielteilchen-Wellenfunktion aufgebaut wird.

2.2 Elementaranregungen

Was passiert nun, wenn das Magnetfeld oder die Elektronendichte so verändert werden, daß der Füllfaktor geringfügig von dem eines stabilen Zustandes bei $\nu = 1/m$ abweicht? Hier führte Laughlin ein völlig neues Konzept von Elementaranregungen ein, die nicht-ganzzahlige elektrische Ladungen tragen. Details zur Entstehung solcher Anregungen würden hier zu weit führen; dem interessierten Leser seien die Originalarbeiten [8, 11] empfohlen. Im folgenden geben wir nur eine sehr kurze Darstellung.

Wenn die Elektronendichte leicht von $\nu = 1/m$ abweicht, müssen einige separate Nullstellen (oder Vertices) der Wellenfunktion existieren, die nicht mit Elektronen zusammenhängen. Laughlin zeigte, daß man einen Vertex am Ort z_0 erzeugen kann, wenn man die rechte Seite von Gleichung (2) mit $\Pi_{j=1}^{N}(z_j - z_0)$ multipliziert. In Analogie zum Plasma entspricht solch ein Ausdruck einem Loch in der Elektronenverteilung nahe z_0, wo dann $1/m$-tel Elektron fehlt. Aufgrund der Ladungsneutralität des Plasmas ist dieses durch den Vertex hinzugefügte Teilchen ein Quasiloch, das das $-1/m$-fache der Ladung eines Elektrons trägt. Der Übergang zu einer Quasiteilchenbeschreibung ist nicht einfach. Hier soll nur noch erwähnt werden, daß es im System Anregungen endlicher Energie mit Ladung $e^* = \pm e/m$ gibt, wenn man sich von den statischen Besetzungszahlen $1/m$ wegbewegt. Sind auch Verunreinigungen vor-

$$\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1^*}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2^*}{9}, \frac{2^*}{11}, \frac{3}{7}, \frac{3^*}{11}, \frac{3^*}{13}, \frac{3^*}{17}, \frac{4}{9}, \frac{4^*}{11}, \frac{4^*}{13}, \frac{5}{11}, \frac{6^*}{13}, \frac{7^*}{15}$$

$$= \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5^*}{9}, \frac{6^*}{11}, \frac{7^*}{13}$$

$$= \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{10}{7}, \frac{13^*}{9}, \frac{11}{7}, \frac{7^*}{3}, \frac{8^*}{3}, \frac{5}{2}$$

Füllfaktoren, bei denen Anomalien beobachtet wurden.

Ein Stern an den Zahlen weist auf Füllfaktoren hin, für die bis jetzt nur Strukturen in ϱ_{xx} gesehen wurden. Die erste Zeile entspricht den Verhältnissen $\nu = p/q$, $(2p < q)$, die zweite bezeichnet $\nu = 1 - p/q$, während die letzte Zeile die Füllfaktoren $\nu = 1 + p/q$, $1 + (1 - p/q)$, $2 + p/q$, etc. beschreibt. Diese Anordnung wird im weiteren bei der Beschreibung der Elektron-Loch-Symmetrie von Bedeutung sein und weiter unten erläutert.

2. Das Verständnis des Effekts

Die typischen Merkmale des FQHE, die Plateaus in ϱ_{xy} und die Minima in ϱ_{xx}, sind im Erscheinungsbild denen des ganzzahligen QHE sehr ähnlich. Trotz dieser auffälligen Ähnlichkeit ist der physikalische Ursprung ein anderer. Hinweise für ein Verständnis des FQHE geben folgende Tatsachen:

– Plateaus und Minima treten bei gebrochenzahligen Besetzungszahlen auf, bei denen keine Struktur in der Einteilchen-Zustandsdichte der Elektronen erwartet wird.

– Man beobachtet den Effekt nur in Proben sehr hoher Beweglichkeit.

Daraus schließt man, daß es sich beim FQHE um eine intrinsische Eigenschaft handelt und daß die Elektron-Elektron-Wechselwirkung eine entscheidende Rolle spielt. Der wichtigste Schritt in der Erklärung des FQHE ist daher, die Eigenschaften eines zweidimensionalen Elektronengases vor einem neutralisierenden Hintergrund und in einem Magnetfeld zu bestimmen, das hoch genug ist, damit das unterste Landau-Niveau nur teilweise gefüllt ist. Eine sehr interessante Arbeit über dieses Problem stammt von Yoshioka, Halperin und Lee [6]. Die Autoren berichten über numerische Rechnungen, bei denen einige wenige Elektronen in einer rechteckigen Zelle eingeschlossen sind. Sie verwendeten periodische Randbedingungen, und mit einem gleichmäßig positiv geladenen Hintergrund wurde das System ladungsneutralisiert. Der Hamilton-Operator für die wechselwirkenden Elektronen wurde dann numerisch diagonalisiert.

2.1 Grundzustand

Abb. 3 zeigt die Grundzustandsenergie pro Teilchen als Funktion der Besetzungszahlen. Die Energie ist in Einheiten der Coulomb-Energie $e^2/\varepsilon l_0$ aufgetragen, wobei ε die Dielektrizitätskonstante von GaAs und $l_0 = (\hbar c/eB)^{1/2}$ die sogenannte magnetische Länge sind. Es ist bekannt, daß bei niedrigen Temperaturen und starken magnetischen Feldern der Hartree-Fock-Grundzustand ein Wigner-Kristall ist [7]. Die Ergebnisse in Abb. 3 zeigen einige interessante Züge: Erstens hat der Grundzustand des Systems deutlich niedrigere Energie als der Wigner-Kristall. Es ist bemerkenswert, daß für die Hartree-Fock-Ergebnisse in dieser Abbildung keine Strukturen bei $\nu = 1/3$ oder bei anderen rationalen Besetzungszahlen auftreten. Ohnehin ist es zweifelhaft, ob der FQHE über eine kristalline Ordnung erklärt werden kann, da solch ein Zustand durch Störstellen in einem realen System fixiert („gepinnt") werden sollte. Damit sollte eine nichtlineare Strom/Spannungs-Charakteristik auftreten, weil dieses Pinning bei kleinen elektrischen Feldern aufgehoben wird. Bei $\nu = 1/3$ wurden selbst bei so kleinen elektrischen Feldern wie 10 μV/cm keine solchen Nichtlinearitäten beobachtet [3]. Die numerische Arbeit von [6] deutet deshalb ganz klar darauf hin, daß der wahre Grundzustand nicht ein Wigner-Kristall ist, sondern eine Art *Flüssigkeit*. Zweitens deuten sich Spitzen bei $\nu = 1/3$ und $\nu = 2/5$ in der Energie pro Teilchen als Funktion des Füllfaktors an (weiterhin eine Struktur bei $\nu = 1/2$, die jedoch sehr von der Systemgröße abhängt). Die Kompressibilität ist proportional zur inversen Ableitung der Energie nach der Dichte. Da diese Ableitung in einer Spitze divergiert, bedeutet eine nach unten zeigende Spitze in Abb. 3, daß die Kompressibilität an der Spitze selbst Null ist. Damit ist die Dichte an diesem Punkt eingefroren, und es gibt keine langwelligen phononenartigen Anregungen im System.

Bis jetzt wissen wir aus numerischen Rechnungen von [6] nur, daß der Grundzustand dem einer translationsinvarianten, wahrscheinlich inkompressiblen Flüssigkeit entspricht. Wir haben weder ein

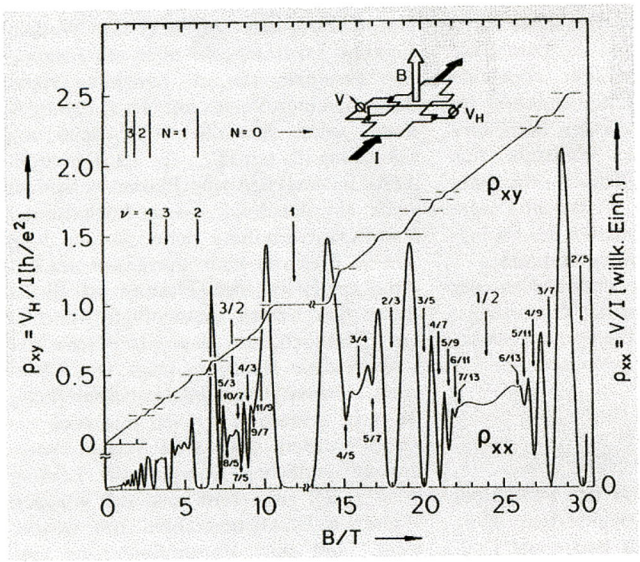

Abb. 2: Der longitudinale Widerstand ϱ_{xx} und der Hall-Widerstand ϱ_{xy} einer Probe mit einer Beweglichkeit von $1{,}3 \cdot 10^6$ cm²/Vs bei $T < 150$ mK [5].

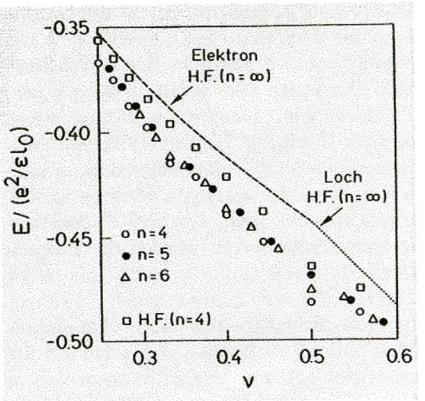

Abb. 3: Energie pro Teilchen eines zweidimensionalen Elektronengases als Funktion der teilweisen Füllung des untersten Landau-Niveaus. Die gestrichelte bzw. gepunktete Linie ist die Energiekurve für den Elektron- bzw. den Lochkristall (unbesetzte Elektronenzustände) in Hartree-Fock-Näherung für ein unendlich ausgedehntes System [6].

handen, dann sind diese Anregungen lokalisiert. Sie sind beim FQHE für die Ausbildung der Hall-Plateaus genauso verantwortlich wie lokalisierte Elektronen beim ganzzahligen QHE.

Bis jetzt wurden die Elementaranregungen über dem Grundzustand diskutiert. Neben den Elementaranregungen gibt es auch kollektive Anregungen, ähnlich wie Phononen in Festkörpern. Diese Art der Anregungen wurde von Girvin et al. [12] untersucht, der die Analogie mit der Bijl-Feynman-Theorie von Elementaranregungen in flüssigem ^{4}He benützte. Abb. 6 zeigt Anregungsenergien für verschiedene Besetzungszahlen, die mit Cluster-Rechnungen [11(b)] verglichen werden. Das Anregungsspektrum ist vom Grundzustand durch eine Lücke getrennt, die die Inkompressibilität des Systems widerspiegelt. Die Dispersion zeigt ein Minimum bei endlichem Wellenvektor, das in seiner Art dem *Rotonenminimum* in flüssigem ^{4}He ähnelt. Für große Wellenvektoren reduzieren sich die Kollektivanregungen zu deutlich getrennten Quasiteilchen-Quasiloch-Paaren.

Eine ähnliche Dispersion für ein magnetisches Exziton zwischen zwei Landau-Niveaus konnte kürzlich in einem Experiment mit resonanter inelastischer Streuung in GaAs-Strukturen [13] hoher Beweglichkeit beobachtet werden. Die Beobachtung der Dispersion der Magnetorotonen *innerhalb* eines Landau-Niveaus war dagegen bis jetzt noch nicht möglich.

Das Verhalten des Elektronensystems bei $\nu = 1/m$ (und den sich aus der Elektron-Loch-Symmetrie ergebenden Füllfaktoren) ist somit erklärt. Wie in Abb. 2 gezeigt wurde, tritt der FQHE jedoch auch bei einigen anderen Füllfaktoren höherer Ordnung auf, z. B. bei 2/5, 3/7, 4/9 ... . Für diese Besetzungszahlen schlug Haldane [14(a)] ein hierarchisches Schema für Zustände mit $\nu = p/q$, $1 < p < q$ vor. Diese Zustände werden durch Ordnung der neuen Generation von Elementaranregungen gebildet, so wie die durch (2) definierten Zustände von den ursprünglichen Elektronen gebildet werden. In jedem Schritt der Hierarchie entsteht eine neue Generation von Elementaranregungen vor dem Hintergrund eines Vakuumzustandes der vorhergehenden Generation. Die Elementaranregungen gehorchen der Bose-Statistik. Der Füllfaktor ν ist dann durch folgenden Kettenbruch gegeben:

$$\nu = \cfrac{1}{m + \cfrac{\alpha_1}{q_1 - \cfrac{\alpha_2}{q_2 - \cfrac{\alpha_3}{q_3 - \dots}}}} \qquad (3)$$

Hierbei ist $m \geq 1$ eine ungerade ganze Zahl, q ist gerade und $\alpha = +1$ (Quasiteilchen) oder -1 (Quasiloch). Da man erwartet, daß sich im Grenzwert $\nu \to 0$ ein Wigner-Kristall bildet, sollte der Kettenbruch dann abbrechen, wenn die Bildung einer Flüssigkeit weniger günstig ist als die Bildung einer Ladungsdichtewelle.

Halperin schlug ein anderes hierarchisches Schema vor [14(b)], um die Füllfaktoren zu erzeugen. In diesem eher Laughlins Theorie entsprechenden Schema folgen die Elementaranregungen einer *fraktionierten* Statistik. Vertauscht man zwei Teilchen, ändert sich die Wellenfunktion des Systems um einen komplexen Phasenfaktor $e^{i\theta}$, $\theta = \pi\nu$. Solche fraktionierten Statistiken sind im zweidimensionalen Raum möglich. Mit Hilfe des Adiabaten-Theorems zeigten Arovas et al. [14(c)], daß Laughlins Quasiteilchen und Quasilöcher der fraktionierten Statistik gehorchen. Fraktionierte Statistiken werden neuerdings auch im Zusammenhang mit der Hochtemperatur-Supraleitung diskutiert.

Experimentelle Ergebnisse für die Quasiteilchen-Quasiloch-Paarerzeugung erhält man aus Messungen der Aktivierungsenergie [15]. Die Grundidee hierbei ist, daß sich das System bei endlicher Temperatur aus dem Grundzustand und einer kleinen Anzahl thermischer Anregungen zusammensetzt. Der diagonale Widerstand ϱ_{xx} (bzw. die Leitfähigkeit σ_{xx}) ist erwartungsgemäß der Anzahl der thermisch angeregten Quasiteilchen und Quasilöcher proportional. Die Aktivierungsenergie $1/2\,\Delta$ (ausgedrückt in Kelvin) erhält man aus

$$\varrho_{xx}(T) \sim \exp(-\Delta/2T), \qquad (4)$$

wobei Δ hier die Quasiteilchen-Quasiloch-Paarerzeugungsenergie bezeichnet, während Δ im ganzzahligen QHE der Aufspaltung der Landau-Niveaus $\hbar\omega_c$ entspricht. Abb. 7 zeigt die Ergebnisse von Δ für $\nu = 1/3$, 2/3, 4/3 und 5/3 [15(a)]. Die experimentellen Daten für die Paarerzeugungsenergie stimmen gut mit den theoretischen Ergebnissen für hohe Magnetfelder [15(b)] überein. Interessanterweise hat jedoch Δ in den Experimenten von Boebinger et al. [15(a)] keine $\sqrt{B}$-Magnetfeldabhängigkeit, wie man es von einer Coulomb-Aufspaltung erwartet. Stattdessen zeigen die Daten eine endliche Schwelle bei $B = 5{,}5$ Tesla, die sich

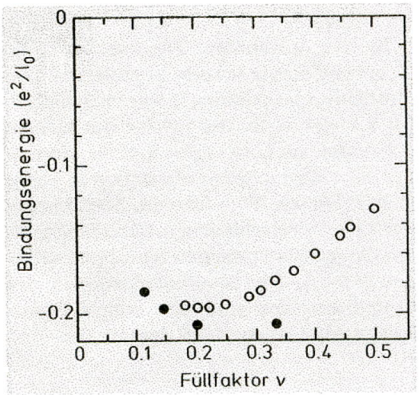

Abb. 5: Bindungsenergie pro Teilchen als Funktion des Füllfaktors für den Laughlin-Zustand (Punkte) und den Wigner-Kristall in Hartree-Fock-Näherung (offene Kreise).

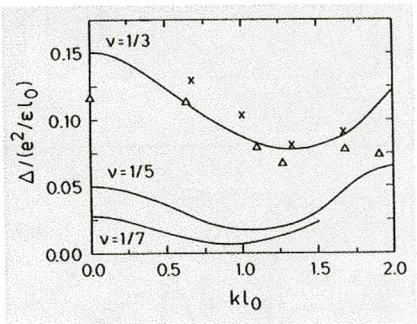

Abb. 6: Energien der kollektiven Anregung für $\nu = 1/3$, 1/5 und 1/7 (durchgezogene Linie). Die Punkte sind Ergebnisse verschiedener Cluster-Rechnungen [12].

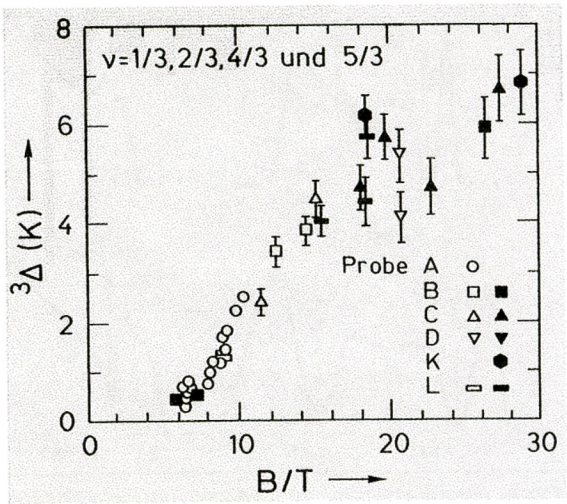

Abb. 7: Paarerzeugungsenergie für $\nu = 1/3$, 2/3, 4/3 und 5/3 als Funktion des Magnetfeldes [15(a)].

auf die Gegenwart von Verunreinigungen zurückführen läßt. Bei höheren Magnetfeldern beobachtet man einen nahezu *linearen* Anstieg bis zu $B \approx 10$ Tesla, gefolgt von einer schwächeren Feldabhängigkeit bis zu $B = 30$ Tesla. Diese lineare Abhängigkeit hat eine weitere interessante Konsequenz, die weiter unten beschrieben wird.

2.3 Spin-Umklapp-Anregungen

In den erwähnten Theorien war die Zeeman-Energie jeweils so groß, daß alle Zustände spin-polarisiert waren. Halperin [9] war der erste, der infolge des kleinen g-Faktors von GaAs ($g \approx 0{,}4$) die Annahme der völligen Spin-Polarisation in Frage stellte. Diesem Weg folgend, berechneten wir für die verschiedenen Besetzungszahlen die jeweils optimalen Spin-Polarisationen [16(a)]. Die Spin-Polarisationen des Grundzustandes sind für einige Besetzungszahlen schematisch dargestellt:

$$\uparrow\uparrow \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) \qquad \uparrow\downarrow \left(\frac{4}{3}\right)\frac{2}{3}$$

$$\uparrow\downarrow \frac{2}{5}\left(\frac{8}{5}\right) \qquad \updownarrow \left(\frac{7}{5}\right)\frac{3}{5}$$

($\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$ und $\updownarrow$ entsprechen jeweils voll polarisierten, unpolarisierten und teilweise polarisierten Zuständen). Die Spin-Zuordnungen für 5/3, 4/3, 8/5 und 7/5 erhält man aus der oben erwähnten Elektron-Loch-Symmetrie, d. h. für nicht-polarisierte Spins sind die Fälle ν und $2 - \nu$ gleich. Die Arbeit über den Grundzustand wurde später auf Spin-Umklapp-Anregungen ausgeweitet [16(b)]. Bei $\nu = 1/3$ ist zwar der Grundzustand vollständig spin-polarisiert, bei kleineren Magnetfeldern hat der energetisch niedrigste Quasiteilchenzustand aber einen *umgeklappten* Spin. Das lineare Verhalten in Abb. 7 wird deshalb als eine Manifestation der Zeeman-Energie interpretiert, die nur bei Spin-Umkehr auftritt [16].

Die Vorhersagen dieser Untersuchungen konnten kürzlich experimentell bestätigt werden. Hierbei war das Magnetfeld nicht mehr senkrecht zur Ebene, sondern um den Winkel θ geneigt [17]. Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung spürt nur die senkrechte Komponente des Magnetfeldes $B_\perp$. Die Zeeman-Energie dagegen hängt vom gesamten Magnetfeld $B_{tot} = B_\perp/\cos\theta$ ab. Bei dieser Art von Experiment wird $B_\perp$ festgehalten und mit vergrößertem θ auch B_{tot} vergrößert. Bei dem Experiment von Clark et al. [17(a)] reagieren die verschiedenen Füllfaktoren mit zunehmenden θ anders als man von der gewöhnlichen Elektron-Loch-Symmetrie erwartet. Abb. 8 zeigt, daß die Zustände für $\nu = 5/3$ und 1/3 mit zunehmendem θ unverändert bleiben, die Zustände $\nu = 4/3$ und 2/3 sich jedoch ändern. Wären alle Zustände spin-polarisiert, erforderte die Elektron-Loch-Symmetrie, daß sich alle diese Füllfaktoren gleich verhielten. Da die Zustände 1/3 und 1/5 von der Theorie her als spin-polarisiert bekannt sind, erwartet man kein verändertes Verhalten, wenn man das Magnetfeld erhöht. Für die Besetzungszahlen 2/3 und 4/3 sagt die Theorie einen unpolarisierten Grundzustand voraus. Plausibel erklären lassen sich die Experimente dadurch, daß mit zunehmendem Gesamtmagnetfeld der unpolarisierte Zustand zerstört wird und ein voll polarisierter Zustand auftritt.

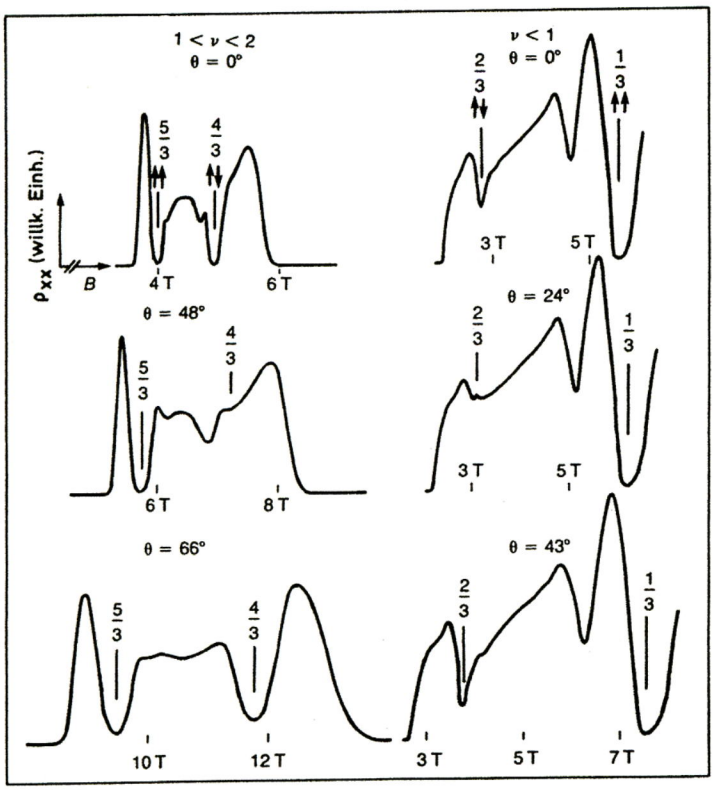

Abb. 8: Ergebnisse für den FQHE bei geneigtem Magnetfeld [17(a)].

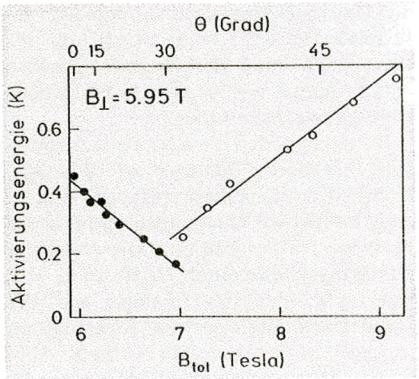

Abb. 9: Aktivierungsenergie für $\nu = 8/5$ als Funktion des gesamten Magnetfeldes B_{tot} [17(b)].

Eisenstein et al. [17(b)] untersuchten in ihrem Experiment mit *geneigtem* Magnetfeld den Füllfaktor $\nu = 8/5$, der Elektron-Loch-symmetrisch zu $\nu = 2/5$ ist. Sie fanden ebenfalls einen Übergang zu voller Polarisierung mit zunehmendem Neigungswinkel bzw. mit zunehmendem magnetischen Feld. Aus den Ergebnissen der Aktivierungsenergie (siehe Abb. 9) als Funktion von B_{tot} kann man außerdem folgende Informationen über diese Spin-Umkehr ablesen:

a) Bei niedrigen Magnetfeldern zeigt die Aktivierungsenergie einen *linearen Abfall,* aus dessen Steigung $d\Delta/dB_{tot}$ man den Wert des g-Faktors (0,4) gewinnen kann. Der Grundzustand ist, wie von der Theorie vorhergesagt, *nicht* spin-polarisiert. Die niedrigsten Anregungen sind spin-umgekehrte Quasiteilchen. Das beobachtete Verhalten erklärt sich aus der Linearität der Zeeman-Energie mit B_{tot}.

b) Mit zunehmendem Magnetfeld erreicht man einen kritischen Wert, ab dem der Grundzustand vollständig polarisiert ist. Die günstigsten Anregungen sind immer noch spin-umgekehrte Quasiteilchen. Dies erklärt den linearen Anstieg der Aktivierungsenergie auch jenseits des kritischen Wertes. Experimente von anderen

Gruppen [17(c,d)] unterstützen dieses Bild. Eine ausführlichere Übersicht findet man in [17(e)].

3. Neuere Entwicklungen

Es ist hier unmöglich, über *alle* experimentellen und theoretischen Entwicklungen auf diesem lebendigen Gebiet zu berichten. Daher soll in diesem Abschnitt nur von zwei vielversprechenden Ansätzen die Rede sein.

Während die Liste der Füllfaktoren, bei denen der FQHE auftritt, unaufhörlich länger wird, gibt es bei $\nu = 1/2$ auch nicht den leisesten Hinweis auf ein Auftreten des FQHE. Die Forderungen nach Antisymmetrie der Laughlin-Wellenfunktion für *spin-polarisierte* Elektronen schließt Besetzungsverhältnisse mit geraden Nennern aus. (Der beobachtete Fall von FQHE bei $\nu = 5/2$ zeigt jedoch, daß es auch hier eine Ausnahme von diesem allgemeinen Gesetz gibt.) Diese halbe Füllung des untersten Landau-Niveaus verdient besondere Aufmerksamkeit. Wir haben zeigen können [18], daß für eine einzelne Schicht von Elektronen die Bildung einer Quantenflüssigkeit für $\nu = 1/2$ sehr unwahrscheinlich ist. Gibt es jedoch in der Nähe eine weitere Schicht mit vergleichbarer Elektronendichte, können die beiden Schichten durch Coulomb-Wechselwirkung koppeln (Tunneln von Elektronen zwischen den Schichten soll ausgeschlossen sein), und mit Hilfe anisotroper Elektronenkorrelationen kann sich dann eine inkompressible Quantenflüssigkeit bilden.

Von den neueren Experimenten, die den FQHE in Vielschichtsystemen untersuchen, ist eine Arbeit von Lindelof et al. [19(a)] bemerkenswert. Hier wurde ein Quanten-Hall-Plateau bei $\nu = 1/2$ in einer doppelten Heterostruktur beobachtet, das recht gut mit unserem Modell übereinstimmt. Anomalien im magnetischen Transport von Doppel-Quantenwell-Strukturen in hohen Feldern wurde kürzlich von Boebinger et al. [19(b)] beobachtet. Der FQHE wurde auch in mehrschichtigen Quantenwell-Strukturen gemessen [19(c)]. Aus dieser Richtung sind in naher Zukunft einige interessante Arbeiten zu erwarten.

In letzter Zeit wurden auch mit Hilfe von optischen Experimenten die Effekte der Elektron-Elektron-Wechselwirkung im zweidimensionalen Elektronengas untersucht. Man mißt dabei die Lumineszenzspektren der strahlenden Rekombination mit durch Licht angeregten Löchern. In der Nähe der Füllfaktoren 1/3 und 2/3 zeigen die Emissionsspektren Energieverschiebungen und Aufspaltungen, die höchstwahrscheinlich mit der Energielücke der inkompressiblen Quantenflüssigkeit im Zusammenhang stehen. Möglicherweise helfen diese Experimente auch, die Spin-Polarisationen des Grundzustandes und der oben angesprochenen Anregungen zu bestimmen. Magnetooptische Experimente stellen eine interessante Alternative zu den Magnetottransport-Untersuchungen dar. Es ist zu erwarten, daß sie Aufschluß über Eigenschaften geben, die den Transportmessungen nicht zugänglich sind.

Seit der ersten experimentellen Entdekkung haben wir einen weiten Weg zum Verständnis der Eigenschaften des korrelierten Elektronensystems in einem starken Magnetfeld zurückgelegt. Der Ansatz von Laughlin und die neuen Experimente mit Proben ausgezeichneter Qualität haben es uns erlaubt, das Geheimnis der typischen Eigenschaften des Zustandes einer Quantenflüssigkeit ein wenig zu lüften. Auf diesem Gebiet wird sehr aktiv geforscht, sowohl experimentell als auch theoretisch. Einige der Konzepte, die ursprünglich auf diesem Gebiet entwickelt wurden, sind inzwischen auch in anderen Bereichen der Festkörperphysik populär geworden, vornehmlich in den Theorien der Hochtemperatur-Supraleitung. Die Geschichte des fraktionierten Quanten-Hall-Effekts ist noch lange nicht abgeschlossen.

*

Ich danke Andrea Heilingbrunner und Gernot Stollhoff für ihre Hilfe bei der deutschen Fassung dieses Artikels. Horst Störmer, Steve Girvin, Allan MacDonald und Peter Maksym haben mir großzügig gestattet, Zeichnungen aus ihren Veröffentlichungen zu benutzen.

Literatur

Bis jetzt wurden etwa 400 Artikel über den fraktionierten Quanten-Hall-Effekt in verschiedenen wissenschaftlichen Zeitschriften und Konferenzberichten veröffentlicht. Es ist daher unmöglich, alle interessanten und wichtigen Arbeiten in solch einem Übersichtsartikel zu erwähnen. Dem interessierten Leser seien folgende Bücher empfohlen: *T. Chakraborty, P. Pietiläinen:* The Fractional Quantum Hall Effect. Springer, Heidelberg 1988; *R. E. Prange, S. M. Girvin* (Hrsg.): The Quantum Hall Effect. 2. Aufl., Springer, New York 1990; und *A. H. MacDonald* (Hrsg.): The Quantum Hall Effect: A Perspective. Jaca Books, Milano 1989.

[1] *E. Wigner*, Phys. Rev. **46** (1934 1002.
[2] *L. Landau*, Z. Phys. **64** (1930) 629 Eine sehr ähnliche, frühere Arbei ist: *V. Fock*, Z. Phys. **47** (1928) 446
[3] *D. C. Tsui, H. L. Störmer, A. C Gossard*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982 1559; *H. L. Störmer*, Phys. Bl. **4** (1984) 308.
[4] *K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pep per*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494.
[5] *R. Willett* et al., Phys. Rev. Lett. **5** (1987) 1776.
[6] *D. Yoshioka, B. I. Halperin, P. A Lee*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983 1219.
[7] *H. Fukuyama, P. M. Platzman, P W. Anderson*, Phys. Rev. **B 1** (1979) 5211.
[8] *R. B. Laughlin*, Phys. Rev. Lett. **5** (1983) 1395.
[9] *B. I. Halperin*, Helv. Phys. Acta **5** (1983) 75.
[10] *E. Y. Andrei* et al., Phys. Rev. Lett **60** (1988) 2765.
[11] (a) *R. B. Laughlin*, Surf. Sci. **14** (1984) 163; *T. Chakraborty*, Phys Rev. **B 31** (1985) 4026; (b) *F. D. M. Haldane, E. H. Rezayi*, Phys. Rev Lett. **54** (1985) 237.
[12] *S. M. Girvin, A. H. MacDonald, P. M. Platzman*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 581.
[13] *A. Pinczuk* et al., Phys. Rev. Lett **61** (1988) 2701.
[14] (a) *F. D. M. Haldane*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 605; (b) *B. I. Halperin*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1583, 2390 (E); (c) *D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 722.
[15] (a) *G. S. Boebinger* et al., Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1606; (b) *R. L. Willett* et al., Phys. Rev. **B 37** (1988) 8476.
[16] *T. Chakraborty* et al., Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 130; *T. Chakraborty*, Surf. Sci. **229** (1990) 16.
[17] (a) *R. G. Clark* et al., Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1536; (b) *J. P. Eisenstein* et al., Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1540; (c) *J. E. Furneaux* et al., Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1098; (d) *R. J. Haug, K. von Klitzing* et al., Phys. Rev. **B 36** (1987) 4528; (e) *R. Clark, P. Maksym*, Physics World, September 1989, p. 39.
[18] *T. Chakraborty, P. Pietiläinen*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 2784.
[19] (a) *P. E. Lindelof* et al., Semicond. Sci. Technol. **4** (1989) 858; (b) *G. S. Boebinger* et al., Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1793; (c) *M. Shayegan* et al., Appl. Phys. Lett **54** (1988) 27.
[20] *B. B. Goldberg* et al., Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 641; *H. Buhmann* et al., Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1056.